GEOMETRÍA ANALÍTICA VECTORIAL

JORGE LUIS LÓPEZ LÓPEZ

Índice

Date: 29 de enero de 2009.

1. Introducción

Cuando uno estudia el movimiento de un cuerpo es necesario transladar un concepto geométrico, la posición del cuerpo, al lenguaje de números, de manera que la posición queda determinada por un sistema de números, llamados *coordenadas*. Por ejemplo, las coordenadas geográficas definen la posición de un punto sobre la superficie de la tierra: cada punto tiene dos coordenadas, latitud y longitud.

Si se desea definir la posición de un punto en el espacio no bastan dos números, se necesitan tres. Por ejemplo, para determinar la posición de un satélite, hay que indicar su altura sobre la superficie de la tierra y también la latitud y la longitud del punto sobre el cual se localiza.

Si se conoce la trayectoria del satélite, es decir, la línea que describe durante su movimiento, se necesita un solo número para determinar su posición. Esto es análogo a la coordenada que usualmente usamos para determinar nuestra posición en una carretera: los kilómetros recorridos a partir de una ciudad específica. De esta manera, decir "vamos al Parque Nacional José María Morelos" es equivalente a decir "vamos al kilómetro 23", ya que el número 23 es la coordenada del parque.

En conclusión, en matemáticas usamos coordenadas para definir de manera numérica la posición de un punto arbitrario en el espacio, en un plano, o en una línea. Esto es muy importante pues, por ejemplo, permite el uso de computadoras para resolver problemas geométricos, y para investigar objetos geométricos.

Finalmente, se invita al alumnos a consultar los excelentes libros [Kod96, Pon80, Bor69, GGK67], en los que estas notas están basadas.

2. Coordenadas cartesianas

En geometría se desea medir objetos geométricos. En particular se desea medir segmentos de recta. Los números reales son los que sirven para medir. Entonces, al fijar un punto O, llamado *origen*, en una línea recta infinita $\mathcal{L}$, y otro punto A en $\mathcal{L}$, la unidad de medida, queda determinada una correspondencia entre los puntos de $\mathcal{L}$ y los números reales: a cada punto P en $\mathcal{L}$ se le asocia la longitud del segmento OP, con signo positivo si P esta a la derecha de O y signo negativo si P esta a la izquierda de O. De esta forma, se ha dotado de un *sistema de coordenadas* a la línea recta. A la recta $\mathcal{L}$ con este sistema de coordenadas se le denota por $\mathbb{R}$, que el conjunto de números reales.

A diferencia de una línea, el plano es bidimensional y los puntos en el plano se corresponden con el conjunto de pares ordenados (x, y) de números reales, denotado por $\mathbb{R}^2$. Para esto es necesario fijar dos líneas rectas infinitas perpendiculares en el plano, llamas *eje* x y *eje* y. Usualmente el eje x es una recta horizontal y el eje y vertical. La intersección de los dos ejes es el *origen* y, al fijar en cada eje una unidad medida (la misma para ambos), se tienen las *coordenadas cartesianas* en el plano: si P es un punto en el plano, las rectas que pasan por P y que son perpendiculares a los ejes intersectan al eje x y al eje y en puntos A y B, respectivamente, luego a P le corresponde el par ordenado (a, b) donde a es el número real que corresponde a A y b es el que corresponde a B. También es claro que si se escogen números reales arbitrarios a y b, existe exactamente un punto en el plano con coordenadas (a, b). Se acostumbra que a sea positivo si esta a la derecha de O y negativo si esta a la izquierda de O, que b sea positivo si esta arriba de O, y negativo si esta abajo de O.

Un ejemplo peculiar de este tipo de coordenadas es usado en el ajedrez.

El espacio es tridimensional, y los puntos en el espacio se corresponden con el conjunto de ternas ordenadas (x, y, z) de números reales, denotado por $\mathbb{R}^3$. Para esto es necesario fijar tres líneas rectas infinitas perpendiculares entre si y que pasan por un punto, llamado *origen*. Estas tres líneas rectas son llamadas *eje* x, *eje* y, y *eje* z. El proceso para dotar de coordenadas cartesianas al espacio es completamente análogo a la situación del plano.

Las ideas básicas de la geometría analítica en el plano aparecieron en 1637 en un libro de Descartes titulado "La Géométrie". Sin embargo, Pierre de Fermat también desarrolló las mismas ideas de manera simultánea e independiente, aunque se publicaron hasta 1679, después de su muerte.

2.1. Ejercicios.

1. En cada caso, econtrar el cunjunto de puntos (x, y) que satisface la relación.
   a) $|x| = |y|$;
   b) $x/|x| = y/|y|$;
   c) $|x| + x = |y| + y$;
   d) $[x] = [y]$;
   e) $x - [x] = y - [y]$;
   f) $x - [x] > y - [y]$.
   Aqui el símbolo $[x]$ denota la parte entera del número x, es decir, el número entero más grande que es menor que x. Por ejemplo, $[3{,}5] = 3$, $[5] = 5$, $[-2{,}5] = -3$.
2. Una carretera recta divide un prado de un bosque. Un peatón viaja sobre la carretera a una velocidad de 5 km/hr, viaja sobre el prado a una velocidad de 4 km/hr, y sobre el campo a 3 km/hr. Inicialmente, el peatón se encuentra sobre la carretera. Dibujar la región que consiste de todos los puntos a los que el peatón puede llegar en una hora.

3. Líneas rectas en el plano

Las rectas se caracterizan por tener *pendiente* constante; es decir, dada una línea recta $\mathcal{L}$ en al plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, al escoger dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en $\mathcal{L}$ el cociente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

no depende del par de puntos escogido.

Luego, si $\mathcal{L}$ es una recta de pendiente m que pasa por el punto $(0, b)$, los puntos (x, y) en ella se caracterizan por cumplir la relación

$$m = \frac{y - b}{x}, \quad \text{que equivale a} \quad y = mx + b.$$

Las únicas rectas que no son descritas por una relación de esta forma son las verticales, cuya ecuación es de la forma

$$x = a.$$

Por lo tanto, se concluye que cada línea recta es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen una *ecuación lineal*

$$ax + by + c = 0,$$

y cada ecuación lineal determina una línea recta.

El ángulo entre la recta $y = mx + b$ y el eje x positivo es igual a $\theta = \arctan m$. La razón por la que en geometría analítica se trabaja con la pendiente y no con el ángulo es porque la pendiente se puede calcular algebraicamente en términos de coordenadas y el ángulo no. La siguiente fórmula es útil para verificar algebraicamente que dos ángulos son iguales: si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son dos rectas con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces el ángulo entre ellas es igual a

$$\arctan \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|. \tag{1}$$

Para probar esto, denotar por θ_1 y θ_2 a los ángulos que forman las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ con el eje x respectivamente. Entonces el ángulo entre dichas rectas es $\theta = \theta_1 - \theta_2$, cuya tangente es

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

El valor absoluto que aparece en la fórmula (1) determina completamente un ángulo θ de manera que $0° \leq \theta \leq 90°$.

3.1. Ejercicios.

1. Si $\mathcal{L}$ tiene ecuación $y = 3x$, ¿cuál es la ecuación de la recta paralela a $\mathcal{L}$ que pasa por $(2, 2)$?

2. Discutir las condiciones en a, b, c, a', b', c' para asegurar que las rectas

$$ax + by + c = 0 \quad \text{y} \quad a'x + b'y + c' = 0$$

se intersecten. Obtener, en su caso, las coordenadas del punto de intersección.
3. Mostrar que dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares precisamente cuando $m_1 m_2 = -1$.
4. Mostrar que la recta que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(3, 4)$ es perpendicular a la que pasa por $(0, 2)$ y $(4, 0)$.
5. Mostrar las siguientes fórmulas trigonométricas.

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2, \\
\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) &= \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2, \\
\tan(\theta_1 + \theta_2) &= \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2}, \\
\tan(\theta_1 - \theta_2) &= \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}.
\end{aligned}$$

4. Círculos en el plano

Por el teorema de Pitágoras, la distancia entre los puntos con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Esto conduce a la ecuación del círculo con centro en el punto (a, b) y radio r:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Es decir, un punto (x, y) satisface esta ecuación si y sólo si se encuentra sobre dicho círculo.

4.1. Ejercicios.

1. *a*) Un círculo es el conjunto de puntos que equidistan de un punto, su centro. Es natural preguntarse por el conjunto de puntos que equidistan de dos puntos (a_1, b_1) y (a_2, b_2). Probar que dicho conjunto es la recta

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (b_1^2 - b_2^2) = 0.$$

   b) Encontrar el conjunto de puntos que equidistan de tres puntos (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3) no alineados.
2. Encontrar los puntos donde se intersectan los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

5. Aplicación a problemas famosos de la antiguedad

Para los antiguos griegos, la geometría trataba acerca de figuras geométricas que pueden ser dibujadas (o construidas, como se dice usualmente) con regla y compás. En efecto Euclides asumió en sus tres primeros postulados que es posible dibujar una recta que pasa por dos puntos dados arbitrariamente, que es posible extender indefinidamente un segmento de recta, y que es posible dibujar un círculo dado su centro y su radio. Se supone que la regla no tiene marcada una escala en ella y puede usarse solamente para dibujar rectas, no para medir.

Entre todos los problemas de construcción con regla y compás hay cuatro muy famosos.

- Trisección del ángulo arbitrario.
- Duplicación del cubo (dado un cubo arbitrario, construir la arista del cubo cuyo volumen es el doble del dado inicialmente).
- Construcción de un polígono regular con n lados.
- Cuadratura del círculo (construir un cuadrado cuya área es la de un círculo dado).

Después de siglos de intentos fallidos, se comenzó a sospechar que algunos de estos problemas no tienen solución. Esto condujo a los matemáticos a preguntarse ¿cómo es posible probar que ciertos problemas no pueden ser resueltos?

Toda construcción usando regla y compás consiste de los siguientes pasos:

1. Conectar dos puntos con una recta.
2. Encontrar el punto de intersección entre dos rectas.
3. Dibujar un círculo con radio y centro dados.
4. Encontrar los puntos de intersección de un círculo con otro círculo o con una recta.

Se asume que el único elemento dado de antemano en un problema de construcción es la unidad de medida. Entonces, como los antiguos griegos ya sabían, todos los números racionales son construibles, y también sus raíces cuadradas. Además, todos los puntos de intersección que provienen de construcciones con regla y compás se obtienen con las operaciones suma, resta, multiplicación, división, raíz cuadrada, pues resultan de resolver ecuaciones de grado a lo más 2. Esto leva a un descubrimiento de Descartes:

Teorema 1 (Criterio algebraico de construcción con regla y compás)**.** *Un punto es construible si y sólo si sus coordenadas se obtienen a partir de 1 mediante las operaciones suma, resta, multiplicación, división, raíz cuadrada.*

Trisección del ángulo: Pierre Wantzel probó a principios del siglo XIX que el ángulo $\pi/3$ no se puede trisectar mostrando que $\cos\frac{\pi}{9}$ no es construible.

Duplicación del cubo: Pierre Wantzel probó a principios del siglo XIX que $\sqrt[3]{2}$ no es construible.

Construcción de un polígono regular con n lados: El polígono regular de 17 lados fue constuido por Carl Friedrich Gauss a sus 19 años en 1796. Gauss probó (con algunos huecos que fueron llenados por Pierre Wantzel en 1837) que un polígono regular con un número primo p de lados es construible precisamente en el caso en el que p es de la forma $2^{2^m}+1$. Se sabe que

$$2^4+1=14, \quad 2^8+1=257, \quad 2^{16}+1=65537,$$

son números primos, ¡pero no se conocen números primos más grandes que sean de la forma $2^{2^m}+1$! Esto demuestra, por ejemplo, que el heptágono regular no es construible. Gauss resolvió este problema usando técnicas algebraicas y números complejos.

Cuadratura del círculo: El número π no es construible. La técnica usada para probar esto fué desarrollada por Charles Hermite, quien probó que e no es construible. Casi inmediatamente y extendiendo ligeramente el método de Hermite, en 1882 F. Lindemann logró demostrar que π no es construible.

5.1. Ejercicios.

1. *a*) Sea x la longitud de la diagonal de pentágono regular cuyo lado es igual a 1. Mostrar usando triángulos semenjantes que
$$\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}.$$
   b) Resolver la ecuación cuadrática para concluir que $x=(1+\sqrt{5})/2$.
   c) Construir un pentágono regular con regla y compás.

6. Parábolas, elipses e hipérbolas

6.1. Parábolas. Una *parábola* es el conjunto de puntos cuya distancia a cierto punto fijo F es igual a su distancia a cierta recta fija $\mathcal{L}$ que no pasa por F. El punto F es llamado *foco* de la parábola y la recta $\mathcal{L}$ es la *directriz*.

Para encontrar una ecuación para la parábola es útil escoger los ejes coordenados de la siguiente manera. El eje y será la perpendicular a $\mathcal{L}$ que pasa por F, el origen será el punto medio entre F y $\mathcal{L}$, y F tendrá coordenadas $(0,p)$ con $p>0$. Entonces la ecuación de la párabola con foco en $(0,p)$ y directriz $y=-p$ es $y=\dfrac{1}{4p}x^2$.

Toda translación preserva rectas y sus pendientes, al igual que las distancias entre puntos. Al transladar la parábola $y=\dfrac{1}{4p}x^2$ al punto (h,k) se tiene una parábola cuya ecuación es $y-k=\dfrac{1}{4p}(x-h)^2$.

La luz y el sonido se reflejan en una curva suave en la misma dirección que si se reflejara en la recta tangente a la curva, siguiendo la regla de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflección. Sea P un punto en una parábola con directriz $\mathcal{L}$ y foco F. Sea Q un punto en $\mathcal{L}$ tal que el segmento PQ es perpendicular a $\mathcal{L}$. Resulta que la tangente a la parábola en el punto P es la bisectriz del ángulo $\angle FPQ$. Debido a esta relación tan especial, los espejos parabólicos (su superficie se obtiene haciendo rotar una parábola sobre su eje de simetría) son muy útiles: telescopios de reflexión, calentadores solares, antenas receptoras y transmisoras, reflectores de luz,...

6.2. Elipses. Una *elipse* es el conjunto de puntos tales que la suma de las dos distancias a dos puntos fijos F y F' es constante. Los puntos F y F' son los *focos* de la elipse. El punto medio entre F y F' es el *centro* de la elipse.

Para encontrar una ecuación para la elipse es útil escoger el eje x como la recta que pasa por F y F', el origen como el centro de la elipse, y F tendrá coordenadas $(c, 0)$ con $c > 0$. Entonces la ecuación de la elipse cuyos puntos son tales que la suma de las dos distancias a $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ es $2a$ es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a > c > 0$ y $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Sea P un punto en una elipse con focos F_1 y F_2. Resulta que la tangente a la elipse en el punto P es la bisectriz externa del ángulo $\angle F_1PF_2$. Debido a esto, el dentista puede utiliza reflectores elípticos para enfocar la luz en algún punto de la boca del paciente.

6.3. Hipérbolas. Una *hipérbola* es el conjunto de puntos tales que la diferencia de las dos distancias a dos puntos fijos F y F' es constante. Los puntos F y F' son los *focos* de la hipérbola. El punto medio entre F y F' es el *centro* de la hipérbola.

Para encontrar una ecuación para la hipérbola es útil escoger el eje x como la recta que pasa por F y F', el origen como el centro de la hipérbola, y F tendrá coordenadas $(c, 0)$ con $c > 0$. Entonces la ecuación de la hipérbola cuyos puntos son tales que la diferencia de las dos distancias a $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ es $2a$ es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $c > a > 0$ y $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

La ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ determina dos rectas llamadas *asíntotas*, con la propiedad de que la hipérbola se aproxima a ellas cuando el punto (x, y) sobre la hipérbola se aleja del origen.

Sea P un punto en una hiperbóla con focos F_1 y F_2. Resulta que la tangente a la hipérbola en el punto P es la bisectriz (interna) del ángulo $\angle F_1PF_2$. Debido a esto, algunos telescopios de reflección usan un segundo espejo hiperbólico, además del parabólico, para redirigir la luz desde el foco de la parábola a un punto más conveniente.

6.4. Dato histórico. Las parábolas, elipses e hipérbolas son indispensables para describir nuestro entorno físico. Por ejemplo, ellas aparecen como órbitas de cuerpos celestes, en óptica o en fenómenos naturales como movimiento de proyectiles.

Sin embargo, estas curvas comenzaron a ser estudiadas desde la Grecia antigua al aparecer como secciones cónicas: intersección de un cono circular con un plano que pasa por el vértice del cono. De manera más precisa, sea $\mathcal{K}$ la curva que resulta de intersectar un cono circular infinito $\mathcal{C}$ con un plano $\mathcal{P}$ que no pasa por el vértice V de $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{P}'$ el plano paralelo a $\mathcal{P}$ que si pasa por V. Tres casos pueden ocurrir:

1. $\mathcal{P}'$ intersecta a $\mathcal{C}$ solamente en V. En este caso $\mathcal{K}$ es una elipse. Para probar esto, se inscriben dos esferas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ en $\mathcal{C}$ que sean tangentes a $\mathcal{P}$. Entonces $2a$ es la distancia entre los cículos de tangencia de $\mathcal{C}$ con $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, y los focos son los puntos de tangencia de $\mathcal{P}$ con $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$.
2. $\mathcal{P}'$ no es tangente a $\mathcal{C}$. En este caso $\mathcal{K}$ es una hipérbola. Para probar esto, se inscriben dos esferas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ en $\mathcal{C}$ que sean tangentes a $\mathcal{P}$. Entonces $2a$ es la distancia entre los cículos de tangencia de $\mathcal{C}$ con $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, y los focos son los puntos de tangencia de $\mathcal{P}$ con $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$.
3. $\mathcal{P}'$ es tangente a $\mathcal{C}$. En este caso $\mathcal{K}$ es una parábola. Para probar esto, se inscribe una esfera $\mathcal{S}_1$ en $\mathcal{C}$ que sea tangente a $\mathcal{P}$. Entonces el foco es el punto de tangencia de $\mathcal{P}$ con $\mathcal{S}_1$, y la directriz es la intersección de $\mathcal{P}$ con el plano que contiene al cículo de tangencia de $\mathcal{C}$ con $\mathcal{S}_1$.

El matemático Apolonio (siglos II o III A.C.) encontró ecuaciones para la parábola, la elipse y la hipérbola:

$$y^2 = px,$$
$$y^2 = px - \frac{p}{a}x^2,$$
$$y^2 = px + \frac{p}{a}x^2,$$

para p y a constantes positivas. Apolonio no escribió las ecuaciones en la forma algebraica anterior, pues en ese timpo el simbolismo algebraico no se había desarrollado. El escribió sus ecuaciones usando conceptos geométricos: y^2 es el área de un cuadrado de lado y, y px es el área de un rectángulo de lados p y x. En griego, parábola significa igualdad: el cuadrado y^2 tiene área igual al rectángulo px. En griego, elipse significa déficit: el área del cuadrado y^2 es menor que el área del rectángulo px. En griego, hipérbola significa exceso: el área del cuadrado y^2 es menor que el área del rectángulo px.

6.5. Ejercicios.

1. Encontrar las ecuaciones de las siguientes parábolas:
   a) foco $(0, -4)$, directriz $y = 4$;
   b) foco $(2, 0)$, directriz $x = -2$.
2. Dibujar las siguientes parábolas:

a) $y^2 = -2x + 6$,
b) $y^2 - 2y = 4x + 3$.

3. Dibujar las regiones del plano cartesiano determinadas por las siguientes desigualdades:
   a) $y^2 \leq 4x$ y $y \geq 2x$,
   b) $-4y^2 < x < 2$.
4. Con respecto a la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = \dfrac{1}{2}x + k$,
   a) encontrar las coordenadas del foco F de la parábola;
   b) encontrar el valor de k que hace que la parábola y la recta sean tangentes, encontrar las coordenadas del punto de tangencia, encontrar el punto Q donde la recta intersecta al eje x, y verificar que $PF = QF$.
5. Encontrar el número de puntos que tienen en común la parábola $y^2 = 2x$ y la recta $y = mx + 1$ de acuerdo al valor de m.
6. Sea F el foco de la parábola $y^2 = 4px$ y sea P un punto arbitrario de esta parábola. ¿Qué figura describe el punto medio del segmento FP?
7. Encontrar la ecuación de una elipse cuyos focos son $(2, 0)$, $(-2, 0)$, y cuyo eje mayor mide 10.
8. Encontrar los vértices, focos, y asíntotas de las siguientes hipérbolas.
   a) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{4} = 1$,
   b) $x^2 - y^2 + 2x = 0$.
9. Encontrar la ecuación de una hipérbola cuyos focos son $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$, y cuyas asíntotas son las rectas $y = \pm 2x$.
10. Sea P un punto que divide al segmento AB de longitud 5 en la razón $2 : 3$. Si los extremos A y B del segmento se mueven sobre los ejes x y y, respectivamente, encontrar la figura descrita por el punto P.
11. Encontrar el conjunto de puntos P tales que la razón de sus distancias al punto $(4, 0)$ y a la recta $x = 1$ es $2 : 1$.
12. ¿Cuántos puntos tienen en común la elipse $3x^2 + y^2 = 3$ y la recta $y = mx + 3$ de acuerdo al valor de m?
13. Probar que una condición necesaria y suficiente para tengan puntos en común la recta $y = mx$ y la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es que $|m| < b/a$.
14. Probar que si una elipse y una hipérbola tienen los mismo focos entonces se intersectan perpendicularmente.
15. Considerar un círculo de radio a y con centro en el punto F. Considerar otro punto F' dentro de este círculo, y sea Q un punto sobre la circunferencia. Sea P el punto en el que la mediatriz de QF' interesecta a QF. Probar que el punto P describe una elipse con focos F y F' cuando Q se mueve sobre la circunferencia.

16. Como una variante del ejercicio anterior, probar que si F' se elige fuera del círculo, entonces el punto P, construido como en el ejercicio anterior, describe un hipérbola cuyos focos son F y F'.

7. Coordenadas polares y rotaciones

Sea P un punto en el plano cuyas coordenadas cartesianas son (x, y). Podemos determinar totalmente a P usando otros dos números: sus *coordenadas polares*. Estas son el número $r > 0$, que es igual a la distancia del origen a P, y el número θ, que es igual a la medida en radianes del ángulo entre el rayo que parte del origen y pasa por P con el eje x positivo. El punto P determina a r completamente, pero θ no esta definido cuando P es el origen, y aun cuando P no sea el origen, el ángulo θ no esta determinado de manera única. En efecto, las coordenadas polares (r, θ) de puntos en el plano no determinan una correspondencia entre coordenadas y puntos en el plano. Si P tiene coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ), entonces

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Considerar una función de la forma $(x, y) \mapsto (x\cos\phi - y\operatorname{sen}\phi, x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi)$. Usando las coordenadas polares es sencillo ver que esta función es una rotación por ángulo ϕ alrededor del origen.

Sea $F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$ un polinomio en dos variables x y y. Haciendo

$$x = u\cos\phi - v\operatorname{sen}\phi, \qquad y = u\operatorname{sen}\phi + v\cos\phi$$

se obtiene un polinomio $G(u, v)$ tal que el coeficiente del término uv es

$$\begin{aligned} -2a\cos\phi\operatorname{sen}\phi &+ 2b(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) + 2c\cos\phi\operatorname{sen}\phi \\ &= (c-a)\operatorname{sen}2\phi + 2b\cos 2\phi. \end{aligned}$$

Entonces, escogiendo ϕ apropiado se puede lograr que $G(u, v) = Au^2 + Cv^2 + Du + Ev + F$. Luego la curva $F(x, y) = 0$ es una cónica rotada alrededor del origen.

7.1. Ejercicios.

1. Encontrar las coordenadas de los puntos que resultan de rotar alrededor del origen al punto $(2, 1)$ por los siguientes ángulos:
   a) $30°$,
   b) $45°$,
   c) $120°$.
2. *a*) Sean P_1 y P_2 dos puntos en el plano cuyas coordenadas polares son (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2). Sea O el origen. Mostrar que el área del triángulo OP_1P_2 es igual al valor absoluto de $\frac{1}{2}r_1r_2\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)$.
   b) Sean P_1 y P_2 dos puntos en el plano cuyas coordenadas cartesianas son (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Sea O el origen. Mostrar que el área del triángulo OP_1P_2 es igual al valor absoluto de $x_1y_2 - x_2y_1$.

3. *a*) Escribir explícitamente la función r que rota el plano un ángulo $\pi/4$ alrededor del origen.
   b) Escribir explícitamente las funciones f y g que reflejan el plano en la recta $y = x$ y $y = 0$, respectivamente. Verificar que $r \circ g \circ r^{-1} = f$.
4. Rotar la curva $y = k/x$ para obtener la curva $\dfrac{u^2}{2k} - \dfrac{v^2}{2k} = 1$.
5. Encontrar la fórmula para una rotación de ángulo ϕ alrededor del punto (a, b).
6. Encontrar una fórmula, en términos de a, b, y c, para la reflexión en la recta $ax + by + c = 0$.
7. Mostrar que una cónica con centro en $(0, 0)$ tiene ecuación en coordenadas polares de la forma
$$r = \frac{p}{1 - a\cos\theta}.$$

8. Ejercicios del primer examen parcial

8.1. Sección 1.

1. Dibujar la curva $y^2 - 4y = 4x^2$. Encontrar las coordenadas del centro, de los focos, de las interesecciones con los ejes, y las ecuaciones de las asíntotas.
2. Encontrar la ecuación de la parábola con foco $(-1, 2)$ y directriz $x = 3$.
3. Encontrar la ecuación de una elipse cuyos focos son $(\sqrt{3}, 0)$ y $(-\sqrt{3}, 0)$ y que pasa por el punto $(2, -1)$.
4. Sean A y A' los puntos en los que la elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ intersecta al eje x. Sean P y P' los puntos en los que la recta $x = c$ intersecta a la elipse, con $c \neq 0$.
   a) Suponiendo que las coordenadas de P y P' son (c, y_1) y $(c, -y_1)$, respectivamente, encontrar las ecuaciones de las rectas $A'P$ y $P'A$ en términos de c y y_1.
   b) Probar que las rectas $A'P$ y $P'A$ se intersectan en un punto que se se encuentra en la hipérbola $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

8.2. Sección 2.

1. Dibujar la curva $y^2 - 4y = -4x^2$. Encontrar las coordenadas del centro, de los focos, y de las interesecciones con los ejes.
2. Encontrar la ecuación de la parábola con foco $(2, 3)$ y directriz $x = -2$.
3. Hallar el rango en el que puede variar m para que la recta $y = mx + 1$ y la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$ se intersecten.
4. Sean B y B' los puntos en los que la elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ intersecta al eje y. Sea P un punto sobre la elipse con coordenadas (x_1, y_1). Sean Q y Q' los puntos de intersección del las rectas BP y $B'P$ con el eje x, respectivamente.

a) Encontrar las coordenadas de Q y Q' en términos de x_1 y y_1.
b) Si O denota al origen del plano cartesiano, probar que $OQ \cdot OQ'$ es constante (es decir, no depende el punto P escogido sobre la elipse).

9. Vectores

Un vector en el plano, o en el espacio, es un segmento de recta dirigido, que acostumbra dibujarse como una flecha. La información que trae consigo un vector es solamente la dirección y longitud del segmento; cuando se habla de un vector, la colocación del segmento correspondiente no es tomada en cuenta. Entonces, las flechas, o segmentos dirigidos, que difieren por una translación son consideran como el mismo vector; luego cada vector puede representarse en el plano cartesiano, o en el espacio cartesiano, como un segmento dirigido cuyo punto inicial es el origen. Esto determina una correspondencia entre el conjunto de vectores en el plano, o en el espacio, y el conjunto de puntos en el plano, o el espacio, respectivamente: a cada vector cuyo punto inicial es el origen le corresponde el punto cuyas coordenadas son su punto final. Esta correspondencia entre puntos y vectores con punto inicial en el origen será usada constantemente.

Hay dos operaciones naturales entre elementos de $\mathbb{R}^2$: la *suma vectorial* de los vectores $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ es

$$u + v = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

y el *producto escalar* del número real α y el vector $u = (u_1, u_2)$ es

$$\alpha u = \alpha(u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2).$$

Estas operaciones se generalizan a $\mathbb{R}^3$ de la manera obvia. Tambiés es cierto que ambas operaciones tienen un descripción geométrica interesante. La suma vectorial $u + v$ es el cuarto vértice del paralelogramo formado por el origen y los puntos u y v. El producto escalar por α representa una dilatación del plano por el factor α (el término dilatación puede usarse aun en los caso de que en los que α es menor que 1 o sea negativo).

Se dice que dos vectores u y v tienen la misma dirección si $u = \alpha v$ para algún real $\alpha \neq 0$ (es más útil asociar el término dirección con una recta más que con un rayo, y decir que $-u$ tiene la misma dirección que u). Se dice que el segmento de recta que une los puntos u y v es *paralelo* al segmento de recta que une los puntos s y t si los vectores $v - u$ y $t - s$ tienen la misma dirección.

Proposición 2 (Parametrización de la recta)**.** *Los puntos $u + \alpha(v - u)$ son precisamente aquellos que se encuentran en la recta que pasa por los puntos u y v.*

Proposición 3 (Concurrencia de medianas)**.** *Las medianas de cualquier triángulo pasan por un mismo punto.*

Este punto es conocido geométricamente como *centroide* del triángulo, y físicamente como *baricentro* del triángulo.

La longitud $\|u\|$ de un vector u es la longitud del segmento de recta que lo representa. Por lo tanto la longitud de $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ es $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, y la de $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ es $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

9.1. Producto interior. Si $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ son vectores en $\mathbb{R}^2$, su *producto interior* es el número

$$u \cdot v = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

La definición es análoga para vectores en el espacio: Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$, su *producto interior* es

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Proposición 4. *Si θ es el ángulo entre los vectores u y v, entonces*

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta.$$

En particular, u y v son ortogonales precisamente cuando $u \cdot v = 0$. La desigualdad $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$ es conocida como *desigualdad de Cauchy-Schwarz*.

9.2. Planos en el espacio. La ecuación de un plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y es ortogonal al vector (a, b, c) es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Más aun, toda ecuación lineal $Ax + By + Cz + D = 0$ determina un plano.

9.3. Ejercicios.

1. Verificar en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ se satisfacen las propiedades de *espacio vectorial*:

$u + v = v + u$	propiedad conmutativa
$u + (v + w) = (u + v) + w$	propiedad asociativa de la suma
$u + 0 = u$	propiedad del neutro aditivo
$u + (-u) = 0$	propiedad del inverso
$1u = u$	propiedad del neutro multiplicativo
$\alpha(u + v) = \alpha v + \alpha u$	propiedad distributiva
$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$	propiedad distributiva
$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$	propiedad asociativa del producto

   en donde 0 denota al vector cuyas coordenadas son cero, y $-u = -1u$.

2. *a*) ¿Cuál es la interpretación geométrica de multiplicar por -1 todo vector en $\mathbb{R}^2$? ¿Es una rotación?
   b) Al multiplicar todo vector en $\mathbb{R}^3$ por -1 ¿el resultado es una rotación?
3. Si $u = (4, -2, 5)$ y $v = (7, 9, -8)$, encontrar el vector w que satisface:
   a) $2u + w = 3v$,
   b) $4w - u = 3u - 4v + 2w$.

4. Si $u = (1,1,0)$, $v = (1,0,1)$, $w = (0,0,1)$ y $t = (5,6,7)$, encontrar números reales α, β, γ tales que $t = \alpha u + \beta v + \gamma w$.
5. Sea $\mathcal{L}_1$ la recta que pasa por $(1,1)$ y es paralela al vector $(1,2)$. Sea $\mathcal{L}_2$ la recta que pasa por $(1,5)$ y es paralela al vector $(3,-4)$. Encontrar las coordenadas del punto de intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.
6. Parametrizar la recta que pasa por $(2,-3,7)$ y es paralela al vector $(1,1,-4)$.
7. Sean A y B dos puntos en el plano. Si u y v denotan a los vectores respectivos, expresar los siguientes puntos en términos de u y v:
   a) el punto que divide internamente el segmento AB en la razón $3:2$,
   b) el punto que divide externamente el segmento AB en la razón $1:2$,
   c) el punto simétrico a A con respecto a B.
8. Encontrar las coordenadas del punto P' que es simétrico a $(5,-2,6)$ con respecto a $(3,2,-4)$.
9. Denotar por A, B y C a los puntos con coordenadas $(2,3,4)$, $(-3,2,0)$ y $(4,-2,5)$, respectivamente.
   a) Encontrar las coordenadas del centroide de $\triangle ABC$.
   b) Encontrar las coordenadas de un punto D tal que el punto medio de AD y el punto medio de BC coinciden.
10. Probar que las cuatro rectas que unen cada vértice de un tetraedro con el centroide de la cara opuesta pasan por un mismo punto, conocido como el centroide del tetraedro.
11. Un vector de longitud 1 es llamado *vector unitario*. Probar que si v es un vector arbitrario distinto del vector 0, entonces $e = \dfrac{1}{\|v\|}v$ es el vector unitario en la misma dirección que v.
12. Encontrar las coordenadas de los puntos sobre los ejes x y y que equidistan de los puntos $(4,5,3)$ y $(3,-2,5)$.
13. Denotar por A y B a los puntos con coordenadas $(4,-1,2)$ y $(1,1,3)$. Encontrar las coordenadas de un punto C en el plano xy tal que $\triangle ABC$ es equilátero.
14. Dados los puntos $(0,3,0)$, $(0,1,-2)$ y $(2,3,-2)$,
   a) ¿Que tipo de triángulo es $\triangle ABC$?
   b) Encontrar la ecuación de la esfera que pasa por ellos y el origen.
15. Encontrar las ecuaciones de las siguientes esferas:
   a) la esfera que tiene como diámetro al segmento que une $(-2,1,5)$ con $(4,-3,-1)$,
   b) la esfera que pasa por $(-5,1,4)$ y es tangente a los tres planos coordenados.
16. Considerar el conjunto de puntos tales que su distancia a $(2,0,0)$ es el doble que si distancia a $(-1,0,0)$. ¿Qué figura forman tales puntos y cuál es su ecuación?

17. Considerar el conjunto de puntos tales que la suma de los cuadrados de su distancia a los puntos $(1,2,0)$ y $(-1,4,2)$ es 38. ¿Qué figura forman tales puntos y cuál es su ecuación?
18. Verificar que el producto interior satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} u\cdot v &= v\cdot u \\ u\cdot(v+w) &= u\cdot v+u\cdot w \\ (\alpha u)\cdot v &= u\cdot(\alpha v)=\alpha(u\cdot v) \end{aligned}$$

19. Verificar lo siguiente:
    a) $(4u+3v)\cdot(4u-3v)=16\|u\|^2-9\|v\|^2$,
    b) $\|u+v\|^2-\|u-v\|^2=4u\cdot v$.
20. Verificar que si los vectores u y v no son iguales a 0, y $\|u+v\|=\|u-v\|$, entonces u y v son ortogonales.
21. ¿Qué tipo de cuadrilátero forman t,u,v,w en cada uno de los siguientes casos?
    a) $(v-t)+(w-u)=2(w-t)$,
    b) $(w-t)=(v-t)-(u-t)$ y $[(u-t)-(w-t)]\cdot[(w-t)-(w-v)]=0$.
22. Bajo las siguientes condiciones en los vectores $u,v\in\mathbb{R}^2$, encontrar la ecuación de las bisectrices del ángulo formado por dichos vectores:
    a) $\|u\|=\|v\|=1$,
    b) $\|u\|=2$, $\|v\|=3$.
23. Dados $u=(2,-1,-5)$, $v=(3x,6,4y-2)$ y $w=(z-1,2,z+1)$,
    a) hallar valores de x y y para que u y v sean paralelos,
    b) hallar un valor de z para que u y w sean ortogonales.
24. Hallar valores de x, y, z para que los vectores $(x,4,6)$, $(2,y,6)$, $(2,4,z)$ sean ortogonales entre si.
25. Sean $u=(2,-2,1)$ y $v=(2,3,-4)$.
    a) Si $w=v-\alpha u$ y u son ortogonales, encontrar α y w.
    b) Encontrar un vector w de longitud 3 que sea ortogonal a u y v.
26. Encontrar el ángulo θ formado por los vectores u y v en los siguientes casos:
    a) $\|u\|=3$, $\|v\|=4$, $u\cdot v=6$;
    b) $\|u\|=\|v\|=u\cdot v=\sqrt{2}$.
27. Si $u=(2,1)$ y $v=(-1,2)$, encontrar un número real α tal que los vectores $4\alpha u+v$ y $\alpha u-3v$ son ortogonales.
28. Los siguientes ejercicios se pueden usar para dar una demostración algebraica de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:
    a) Para cualquier número real x y cualesquiera vectores u y v, mostrar que

    $$(u+xv)\cdot(u+xv)=\|u\|^2+2x(u\cdot v)+s^2\|v\|^2,$$

    y luego $\|u\|^2+2x(u\cdot v)+s^2\|v\|^2\geq 0$ para cualquier número real x.
    b) Si A, B y C son números reales y $A+Bx+Cx^2\geq 0$ para cualquier número real x, mostrar que $B^2-4AC\leq 0$.
    c) Probar que $(u\cdot v)^2\leq\|u\|^2\|v\|^2$.

29. Encontrar la ecuación de los siguientes planos:
    a) el plano que pasa por $(5, 3, 4)$ paralelo al plano yz,
    b) el plano que pasa por $(3, -2, 5)$ perpendicular al vector $(-4, 2, -3)$,
    c) el plano que pasa por $(4, -2, 3)$ paralelo al plano $3x + 6y - 4z = 7$,
    d) el plano que pasa por los tres puntos $(3, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 5)$.
30. Dados los planos $3x + z - 1 = 0$ y $x - \sqrt{5}y + 2z = 0$, encontrar el vector unitario ortogonal a cada plano y ángulo entre dichos vectores.
31. Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-2, 1, 3)$ y es perpendicular a los planos $x - y + z = 0$ y $2x + 3y - z = 5$.
32. Determine el valor máximo de
    a) $\cos^2 \angle POA + \cos^2 \angle POB + \cos^2 \angle POC + \cos^2 \angle POD$,
    b) $\cos \angle POA + \cos \angle POB + \cos \angle POC + \cos \angle POD$,

    donde $ABCD$ es una cara de un cubo inscrito en una esfera con centro O y P es cualquier punto en la superficie de la esfera.
33. Sean A, B, C, D puntos en el espacio. Sea M y N los puntos medios de los segmentos AC y BD. Probar que
    $$4MN^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2.$$
34. Sea $ABCD$ un tetraedro tal que $AB = AC = AD$. Sea O el centro de la esfera que pasa por A, B, C y D. Sea G el centroide del triángulo ACD, sea E el punto medio de BG, y sea F el punto medio de AE. Probar que OF es perpendicular a BG si y sólo si OD es perpendicular a AC.
35. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo. Sea P el punto de intersección de AB y CD. Sea Q el punto de intersección de CD y EF. Sea R el punto de intersección de EF y AB. Sea S el punto de intersección de BC y DE. Sea T el punto de intersección de DE y FA. Sea U el punto de intersección de FA y BC. Probar que
    $$\frac{PQ}{CD} = \frac{QR}{EF} = \frac{RP}{AB} \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{ST}{DE} = \frac{TU}{FA} = \frac{US}{BC}.$$

9.4. Ejercicios adicionales.

1. Describir geométricamente el conjunto de puntos cuyas coordenadas son de la forma $m(0, 1) + n(1, 1)$, donde m y n son enteros. Hacer un dibujo de ellos.
2. Describir geométricamente el conjunto de puntos cuyas coordenadas son de la forma $m(0, 1) + r(1, 1)$, donde m es un entero y r es un número real. Hacer un dibujo de ellos.
3. Sea $v = (2, 0)$. Dibujar los vectores $v_t = (-1, 1) + tv$, para $t = 0$, $1/4$, $1/2$, $3/4$, 1. Luego describir, geométricamente, el conjunto de vectores $v_t = (-1, 1) + tv$ donde t toma todos los valores en el intervalo $[0, 1]$.
4. Un avión se localiza en el punto $(3, 4, 5)$ a media noche, y viaja con vector velocidad $(400, 500, -1)$ por hora. Un aeropuerto se encuentra en el punto

$(23, 29, 0)$. ¿A qué hora pasa el avión exactamente sobre el aeropuerto? (Suponer que la tierra es el plano xy.) ¿A qué altura pasa el avión sobre el aeropuerto?

5. Dibujar los ocho puntos de la forma (a, b, c), donde a, b, c son cada uno de ellos iguales a 1 o -1. ¿De qué figura geométrica son vértices tales puntos?
6. Sea $v_t = (1, 0, 0) + t(2, 1, 1)$ donde t es un número real. Dibujar v_t para $t = -1, 0, 1, 2$. Luego describir geométricamente el conjunto de todos los vectores v_t.
7. ¿Donde se intersectan el plano yz y la recta que pasa por los dos puntos $(3, 4, 5)$ y $(6, 7, 8)$?
8. ¿Se intersectan las rectas $(t, 3t - 1, 4t)$ y $(3t, 5, 1 - t)$?
9. Encontrar el único valor de c tal que las rectas $(t, -6t+c, 2t-8)$ y $(3t+1, 2t, 0)$ se intersectan.
10. Considerar la recta $t(3, 2, 1)$. ¿Cuál es la distancia de la recta al punto $(2, 0, 0)$? ¿Para que valor de t se alcanza esta distancia?
11. En $\mathbb{R}^3$, encontrar la distancia del origen a la recta que pasa por $(1, 2, 3)$ y $(1, 1, 1)$.
12. Probar que la longitud de la proyección de v en u es igual a $|\cos\theta|\|v\|$, donde θ es el ángulo entre v y u.
13. Hallar la distancia del punto $(2, 8, -1)$ a la recta que pasa por $(1, 1, 1)$ y es paralela al vector $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.
14. Hallar la distancia del punto $(1, 1 - 1)$ a la recta que pasa por $(2, -1, 2)$ y es paralela al eje z.
15. Hallar la distancia del punto $(1, 1, 2)$ a la recta $(3t + 2, -t - 1, t + 1)$.
16. Hallar la distancia del punto $(1, 1, 0)$ a la recta que pasa por $(1, 0, -1)$ y $(2, 3, 1)$.
17. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular al vector $(1, 1, 1)$.
18. Hallar la ecuación del plano que pasa por $(1, 0, 0)$ y es perpendicular al vector $(1, 1, 1)$.
19. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular al vector $(1, 0, 0)$.
20. Hallar la ecuación del plano que pasa por (a, b, c) y es perpendicular al vector (a, b, c).
21. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ y $(0, 1, 0)$.
22. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$.
23. Hallar un vector unitario perpendicular al plano que pasa por el origen y los puntos $(1, 1, 1)$ y $(1, 1, -1)$.
24. Hallar un vector unitario perpendicular al plano que contiene a la recta $(1 + t, 1 - t, t)$ y el punto $(1, 1, 1)$.

25. ¿En dónde se intersectan el plano $2x - y + 3z = 7$ y la recta que pasa por el origen y es paralela al vector $(2, -1, 3)$? Encontrar la distancia del origen a dicho plano.
26. Encontrar la distancia del punto $(1, 1, 1)$ al plano $2x - y + 3z = 7$.
27. Hallar la distancia del punto $(2, -1, 2)$ al plano $2x - y + z = 5$.
28. Hallar la distancia del origen al plano que pasa por $(1, 2, 3)$, $(-1, 2, 3)$ y $(0, 0, 1)$.
29. Hallar la distancia del punto $(4, 2, 0)$ al plano que pasa por $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(1, 1, 2)$.
30. Dados dos vectores a y b no nulos, mostrar que el vector $v = \|a\|b + \|b\|a$ biseca el ángulo entre a y b.
31. Supóngase que e_1 y e_2 son vectores perpendiculares unitarios en el plano $\mathbb{R}^2$. Sea v un vector arbitrario. Mostrar que $v = (v \cdot e_1)e_1 + (v \cdot e_2)e_2$.
32. Un fluido fluye a través de un superficie plana con una velocidad uniforme v. Sea n el vector unitario perpendicular a la superficie plana. Mostrar que $v \cdot n$ es el volumen del fluido que pasa por unidad de área del plano en una unidad de tiempo.
33. Sea $R = P_0 + t(a, b, c)$ la recta que pasa por el punto P_0 y es paralela al vector $d = (a, b, c)$. Sea $u = d/\|d\| = (\mu, \lambda, \nu)$. Sea α el ángulo entre d y el vector $(1, 0, 0)$, β el ángulo entre d y el vector $(0, 1, 0)$, γ el ángulo entre d y el vector $(0, 0, 1)$. Mostrar que $\mu = \cos\alpha$, $\lambda = \cos\beta$, $\nu = \cos\gamma$ y que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

10. Ejercicios del segundo examen parcial

10.1. Sección 1.

1. Una esfera con centro en $(3, 7, 4)$ y radio 5 intersecta al plano xy en un círculo. Encontrar el centro y el radio de este círculo.
2. Encontrar 3 vectores perpendiculares entre sí, sabiendo que uno de ellos es $(1, 2, 2)$ y la primera coordenada de otro de ellos es 0.
3. ¿La línea recta que pasa por los puntos $(0, 1, 2)$ y $(1, 0, 2)$ intersecta a la línea recta que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$ y $(3, -3, 5)$?

   (En caso de que la respuesta sea negativa hay que argumentar, y si es positiva hay que dar el(los) punto(s) de intersección.)
4. ¿Existe un número real w tal que la recta que pasa por los puntos $(1 - w, 1 + w, 0)$ y $(w, 2, -w)$ es perpendicular al plano $x + y + z + 1 = 0$?

   (En caso de que la respuesta sea negativa hay que argumentar, y si es positiva hay que dar el valor de w.)
5. ¿Existe un número real w tal que el plano que pasa por los puntos $(4, -2, 5)$, $(-3, 4, -4)$ y $(1, 2, 4)$ también contiene al punto $(w, 1 - w, 4)$?

   (En caso de que la respuesta sea negativa hay que argumentar, y si es positiva hay que dar el valor de w.)

10.2. Sección 2.

1. Encontrar un vector que forme ángulos de $60°$, $45°$ y $60°$ con los ejes x, y y z, respectivamente.
2. Sean v_1 y v_2 dos vectores perpendiculares no nulos en $\mathbb{R}^3$. Si $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ es perpendicular a v_1 y v_2, mostrar que $v = 0$.
3. Considerar la línea recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela a la línea recta que pasa por los puntos $(-1, 0, 1)$ y $(0, 2, -1)$. ¿Dicha recta intersecta al plano yz?

   (En caso de que la respuesta sea negativa hay que argumentar, y si es positiva hay que dar el(los) punto(s) de intersección.)
4. ¿Existe un número real w tal que los 2 planos con ecuaciones
$$wx + (2 - w)y + (2w - 1)z + 3 + 2w = 0$$
$$(2 - w)x + (3w - 2)y + z - 2 + 3w = 0$$
   se intersectan en una recta paralela al vector $(3, -1, 3)$?

   (En caso de que la respuesta sea negativa hay que argumentar, y si es positiva hay que dar el valor de w.)
5. Considerar el plano que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(1, -1, 0)$ y $(1, 2, 3)$. Considerar también el plano que pasa por los puntos $(-1, 2, -1)$, $(2, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$. Dar 7 puntos que se encuentren en la intersección de ambos planos.

11. Superficies cuádricas, y parametrización

Una superficie cuádrica S es por definición el conjunto de todos puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas anulan un polinomio cuadrático $P(x, y, z)$ en tres variables x, y, x, es decir, P es de la forma
$$P(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx + gx + hy + iz + j.$$

Una superficie cuádrica puede estar degenerada. Por ejemplo, la superficie cuádrica de la ecuación $x^2 + y^2$ es una recta: el eje z.

Para entender y bosquejar una superficie cuádrica S, se puede hacer uso de sus curvas de nivel. Este procedimiento consiste en dar un valor constante K a alguna de las variables, digamos $z = K$, y la intersección del plano $z = K$ con S es la cónica $P(x, y, K) = 0$, que si es posible entender.

Parametrizar una superficie S en $\mathbb{R}^3$ consiste en conseguir una función $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen es S. Todas las cuádricas se pueden parametrizar usando funciones algebraicas de grado a lo más 2, funciones trigonométricas circulares y funciones trigonométricas hiperbólicas.

11.1. Ejercicios.

1. Entender y bosquejar las siguientes superficies. Hallar también una parametrización de cada una.

   a) $z = x^2 - y^2$ (Paraboloide hiperbólico).

b) $z = x^2 + y^2$ (Paraboloide elíptico).
c) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{16}y^2 + z^2 = 1$ (Elipsoide).
d) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ (Hiperboloide de una hoja).
e) $x^2 + 4y^2 - z^2 = -4$ (Hiperboloide de dos hojas).
f) $z = y^2 + 1$ (Cilindro parabólico).
g) $x^2 - y^2 = 0$.
h) $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$.
i) $z^2 = 0$.
j) $x^2 + 3y^2 + z^2 = 0$.

2. Entender y bosquejar las siguientes superficies.
   a) $z = x^3 - 3xy^2$ (Silla del mono).
   b) $z = 4x^3y - 4xy^3$ (Silla del perro).
3. Expresar la superficie $xz = 1$ en coordenadas esféricas.
4. Describir la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es $\theta = \pi/4$.
5. Describir la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es $r = \phi$.
6. Describir la curva cuyas ecuaciones en coordenadas esféricas son $r = 1$, $\phi = \pi/2$.
7. Describir la curva cuyas ecuaciones en coordenadas esféricas son $r = 1$, $\theta = 0$.
8. Expresar el plano $z = x$ en coordenadas cilíndricas y esféricas.
9. Considerar tres sistemas de ecuaciones:
   a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ y^2 + z^2 = 1; \end{cases}$
   b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0; \end{cases}$
   c) $\begin{cases} y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0. \end{cases}$

   Parametrizar la curva algebraica que define cada sistema.
10. Hallar la ecuación de la superficie generada al rotar la recta que une los puntos $(1, 1, 1)$ y $(0, 1, 0)$ alrededor del eje x.
11. Rotar la elipse $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ alrededor de una recta $\mathcal{L}$. Mostrar que la superficie que se obtiene es una cuádrica cuando $\mathcal{L}$ es el eje x o el eje y, y es una superficie de cuarto grado para cualquier otra $\mathcal{L}$.
12. Hallar el plano que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ e intersecta al cono elíptico $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - z^2 = 0$ en un círculo.
13. ¿Al intersectar el plano $13x + 16y - 208z = 0$ con el hiperboloide de una dos hojas $\frac{1}{16}x^2 - y^2 - \frac{9}{25}z^2 - 1 = 0$ se obtiene un círculo?
14. Hallar la ecuación del hiperboloide de una hoja generado al rotar la recta que pasa por $(1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3)$ alrededor del eje que pasa por los puntos $(-1, 0, 1)$ y $(5, 1, -1)$.

15. Considerar el centro de simetría de hiperboloide de una hoja dado por $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 1 = 0$. Encontrar un plano que pasa por dicho centro e intersecta al hiperboloide en un círculo.
16. Considerar tres rectas en $\mathbb{R}^3$ determinadas por las intersecciones de dos planos: la recta $\mathcal{L}_1$ determinada por $x = 1$ y $y + z = 0$, $\mathcal{L}_2$ determinada por $x = 0$ y $y = 0$, $\mathbb{L}_3$ determinada por $x = -1$ y $y - z = 0$. Mostrar que la superficie formada por todas las rectas que intersectan a $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ forman un paraboloide hiperbólico.

12. Ejercicios del tercer examen parcial

12.1. Sección 1.

1. Describir y dibujar superficies dadas por las siguientes ecuaciones:
   a) $x^2 + 2xz + z^2 = 0$,
   b) $x^2 + y^2/4 + z^2 = 0$,
   c) $x^2 + y^2 + z = 0$,
   d) $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2 = 0$,
   e) $z^2 = x^2 - 4y^2$.
2. Hallar un vector unitario perpendicular a $(0, 1, 1)$ y $(2, 0, 1)$.
3. Encontrar un vector unitario perpendicular al vector $(1, -1, 0)$ y a la recta $(2t - 1, -t - 1, t + 2)$.
4. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(1, 2, 3)$, $(1, -1, 1)$ y $(-1, 1, 1)$.
5. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(1, 1, -1)$ y es perpendicular al vector $(1, -1, -1)$.
6. Encontrar un vector unitario paralelo a los planos $8x+y+z = 1$ y $x-y-z = 0$.

12.2. Sección 2.

1. Describir y dibujar las siguientes cuádricas:
   a) $z = x^2 + y^2$,
   b) $z = x^2 - y^2$,
   c) $z = -x^2 - y^2$,
   d) $z = x^2$,
   e) $z = -x^2$,
   f) $z = 0$.
2. Hallar un vector unitario perpendicular a $(3, 0, 2)$ y $(0, 1, -2)$.
3. Encontrar un vector unitario paralelo a la recta $(3t + 1, 16t - 2, -t - 2)$.
4. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(1, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$ y $(0, 0, 0)$.
5. Encontrar un vector unitario que forme ángulos iguales con los vectores $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, y un ángulo de $30°$ con $(1, 0, 0)$.
6. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(1, -1, 6)$ y es perpendicular al vector $(1, 1, 1)$.

13. Ejercicios de examen extraordinario

Referencias

[Bor69] K. Borsuk, *Multidimensional analytic geometry*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. Monografie Matematyczne, vol. 50, Polish Scientific Publishers, 1969.

[GGK67] I. M. Gelfand, E. G. Glagoleva, and A. A. Kirillov, *The method of coordinates*, Dover Publications, INC., 1967.

[Kod96] K. Kodaira, *Algebra and geometry*, Mathematical World, vol. 10, American Mathematical Society, 1996.

[Pon80] L. S. Pontrjagin, *Learning higher mathematics*, Springer-Verlag, 1980.